

Die quadratische Funktion

Eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ heißt quadratische Funktion.

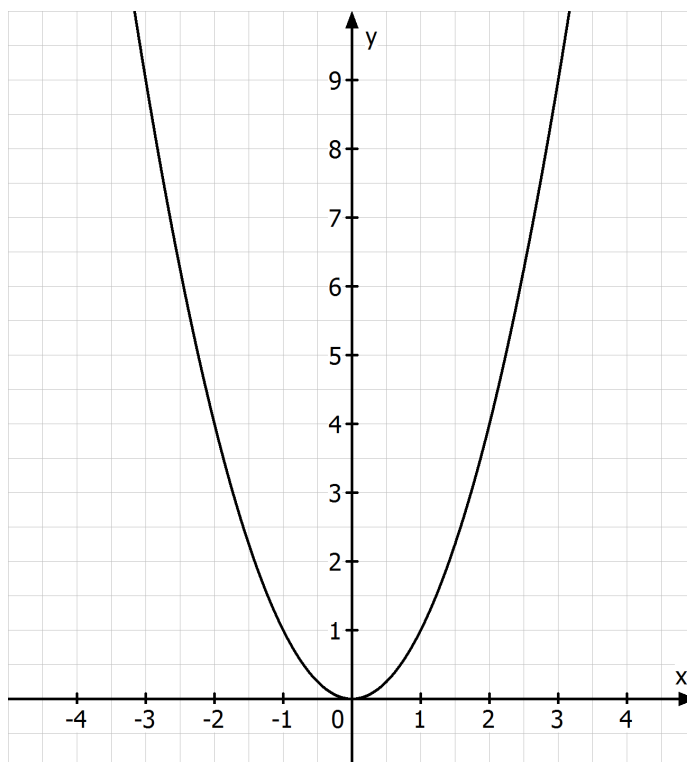
Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel.

(1) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graph:



Den Graph der Funktion $y = x^2$ nennt man auch Normalparabel.

Eigenschaften der Funktion $y = x^2$:

- a) Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$ Wertemenge: $W = \mathbb{R}_0^+$
- b) Die y-Achse ist Symmetrieachse (Gleichung der Symmetrieachse: $x = 0$).
- c) Der Scheitel ist der tiefste Kurvenpunkt (Koordinaten des Scheitels $(0|0)$).

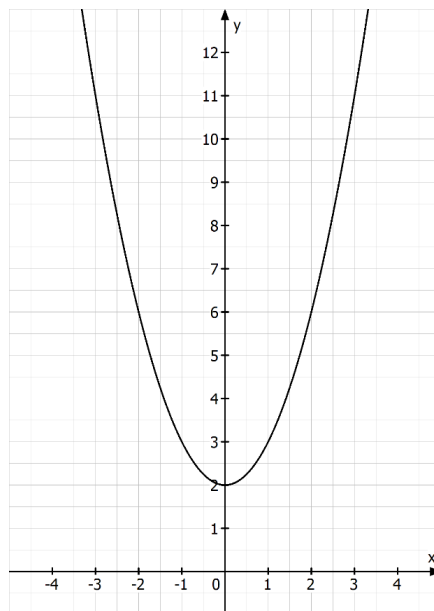
(2) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + t$ ($t \in \mathbb{R}$)

Beispiel: $y = x^2 + 2$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11

Graph:



Der Graph von $y = x^2 + t$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um t in y-Richtung ($t > 0$: nach oben; $t < 0$: nach unten).

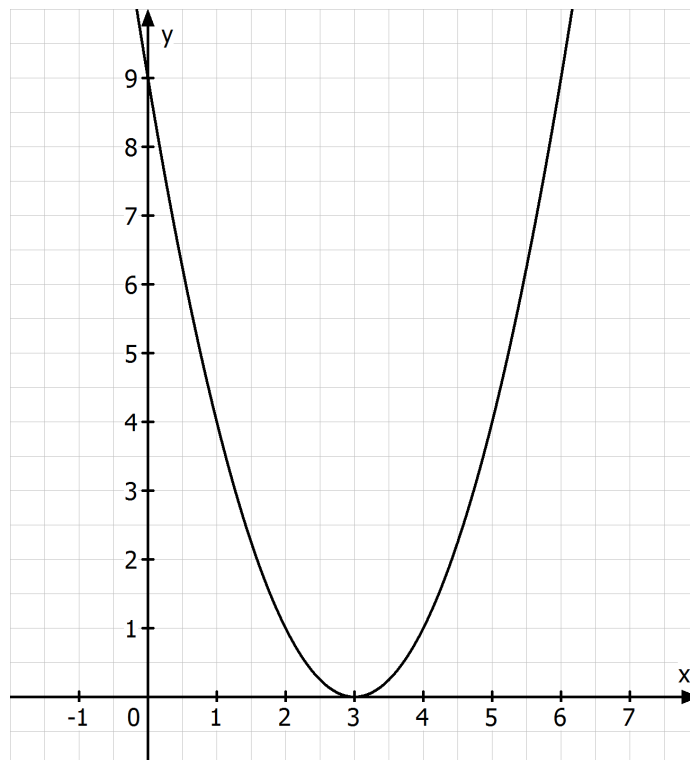
(3) Die Funktion mit der Gleichung $y = (x - s)^2$

Beispiel: $y = (x - 3)^2$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0	1	4	9

Graph:



Der Graph von $y = (x - s)^2$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um s in x -Richtung ($s > 0$: nach rechts; $s < 0$: nach links).

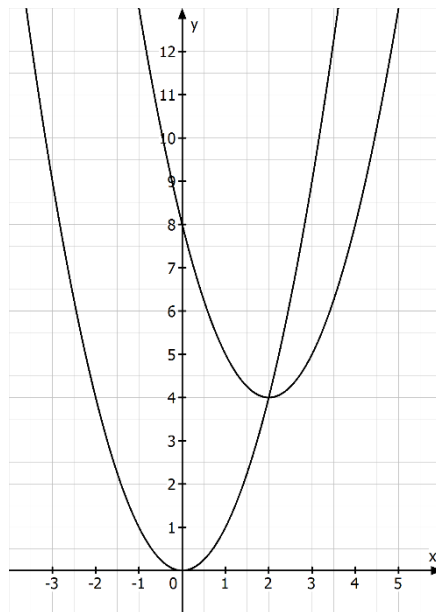
(4) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$

Beispiel: $y = x^2 - 4x + 8$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	13	8	5	4	5	8	13

Graph:



Der Graph von $y = x^2 + px + q$ entsteht aus der Normalparabel durch eine Verschiebung in x- und y-Richtung.

Im Beispiel:

Normalparabel: $y = x^2$

Verschiebung um 2 in x-Richtung: $y = (x - 2)^2$

Verschiebung um 4 in y-Richtung: $y = (x - 2)^2 + 4$

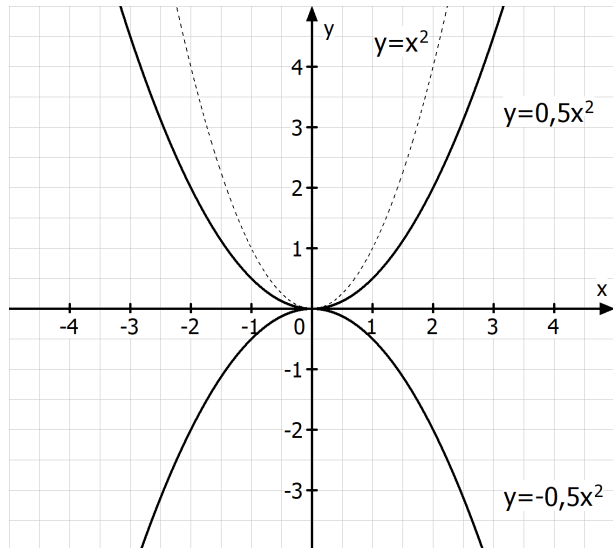
$$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

Die Gleichung $y = (x - 2)^2 + 4$ enthält die Koordinaten des Scheitels S(2/4) und heißt daher Scheitelform.

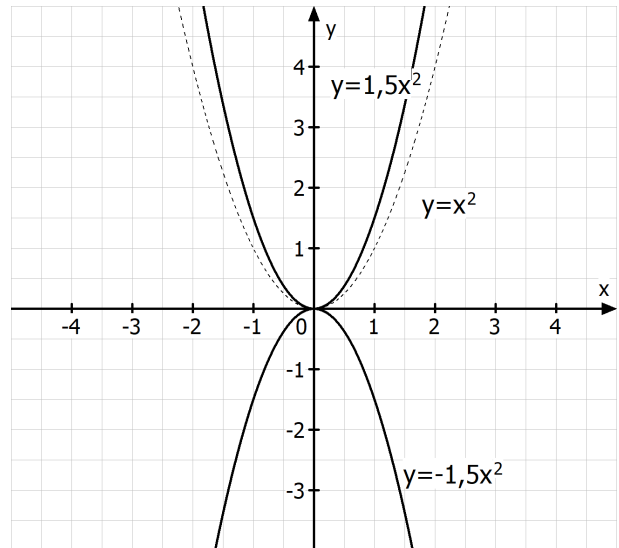
(5) Die Funktion mit der Gleichung $y = ax^2$

Beispiele:

$$y = \pm 0,5x^2$$



$$y = \pm 1,5x^2$$



Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2$ sind Parabeln mit dem Scheitel $S(0/0)$. Ihre Form wird durch die Variable a festgelegt.

$a > 1$: Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestreckt

$0 < a < 1$: Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestaucht

$-1 < a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestaucht

$a < -1$: Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestreckt

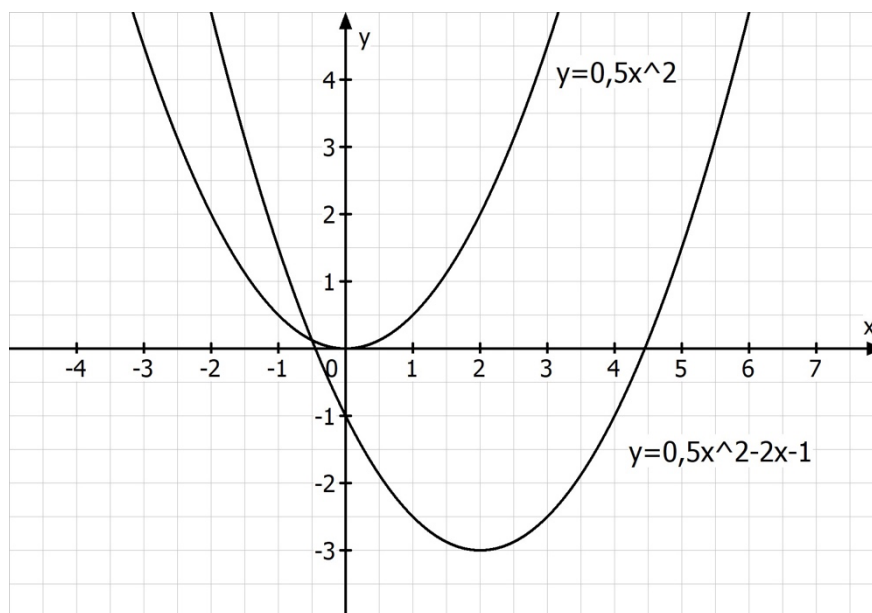
(6) Die Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$

Beispiel: $y = 0,5x^2 - 2x - 1$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	1,5

Graph:



Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ sind Parabeln, die durch Parallelverschiebung aus den gestreckten oder gestauchten Normalparabeln mit der Gleichung $y = ax^2$ hervorgehen.

In der obigen Abbildung ist die Parabel mit der Gleichung $y = 0,5x^2 - 2x - 1$ durch eine Verschiebung der Parabel mit der Gleichung $y = 0,5x^2$ um zwei nach rechts und drei nach unten entstanden.

Der Scheitelpunkt einer Parabel hat eine große Bedeutung für die Parabel. Die Koordinaten des Scheitelpunktes können wie folgt bestimmt werden:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

y_s wird am sinnvollsten ermittelt, indem man x_s in den Parabelterm einsetzt.

Damit lässt sich die allgemeine Form einer Parabel p ganz einfach in der Scheitelpunktform darstellen:

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Bestimmung der Koordinaten des Scheitels und der Scheitelform im konkreten Beispiel:

$$p(x) = 0,5x^2 - 2x - 1$$

$$a = 0,5 \quad b = -2 \quad c = -1$$

$$x_s = -\frac{-2}{2 \cdot 0,5} = 2 \quad y_s = 0,5 \cdot (2)^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -3$$

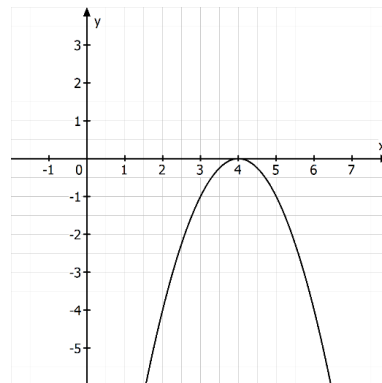
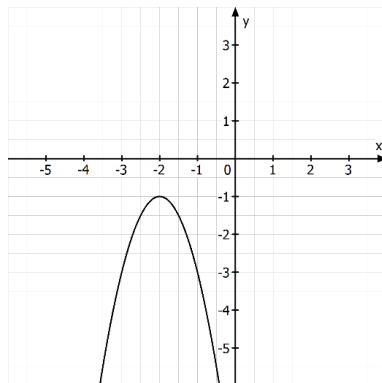
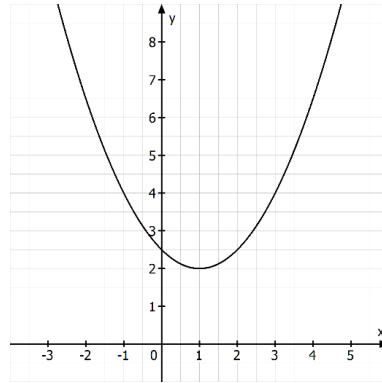
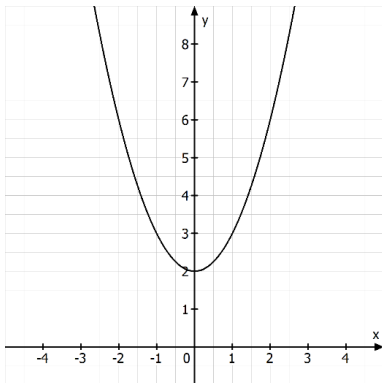
$$\Rightarrow S(2 | -3)$$

$$\text{Scheitelform: } p(x) = 0,5 \cdot (x - 2)^2 - 3$$

Für die folgenden Aufgaben kann als Hilfe bzw. Kontrolle gerne die
 Geogebra Datei „Eingabe allgemeine quadratische Funktion“
 (<https://www.geogebra.org/m/bxnk5pxe>) verwendet werden.



- 1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = 2x^2 + 8x + 8$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an. ☐
- 2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = -x^2 - 4x - 5$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an. ☐
- 3 Geben Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen in der Scheitelpunktform an. ☐



4.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt. 

4.1 Wenn eine Parabel gestaucht ist, gilt $a \leq 1$.

4.2 Wenn die Koordinaten des Scheitelpunkts gleich sind, ist die Parabel nach rechts verschoben.

4.3 Aus $c = 0$ folgt, dass die Parabel keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat.

4.4 Aus $a < -1$ folgt, dass die Parabel gestreckt ist.

4.5 Für $c > 0$ verläuft die Parabel nur im I. und II. Quadranten.

5.0 Von einer Parabel sind jeweils der Streckfaktor a und die Verschiebung parallel zu den Koordinatenachsen bekannt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform an. 

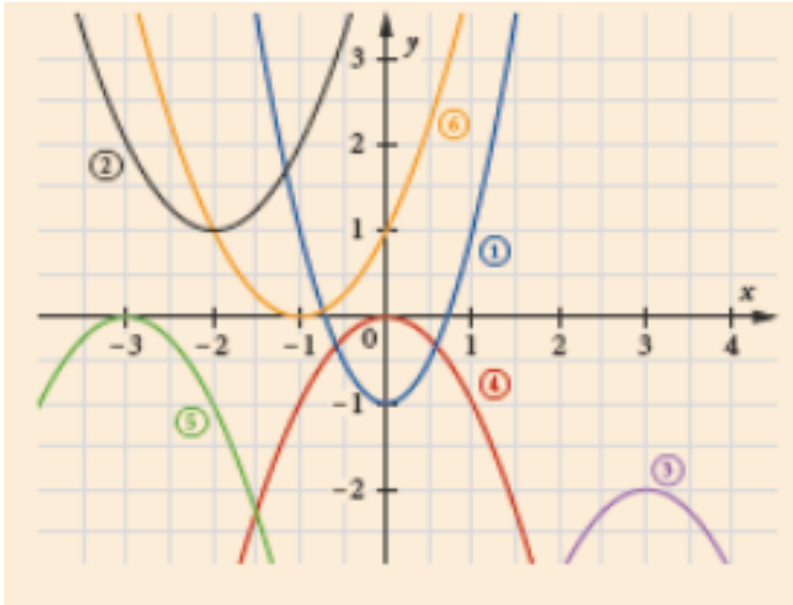
5.1 $a = 1$; Verschiebung um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten;

5.2 $a = -2$; Verschiebung um 4,5 Einheiten nach oben;

5.3 $a = -\frac{1}{6}$; Verschiebung um 3 Einheiten nach links;

6 Ordnen Sie die Graphen und Gleichungen einander zu. ○

- a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = 2x^2 - 1$ c) $f(x) = -(x+3)^2$
 d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e) $f(x) = -(x-3)^2 - 2$ f) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



7 Lösen Sie mindestens fünf neue Aufgaben in der Geogebra Datei

„Übung zur allgemeinen quadratischen Funktion“. ○

(<https://www.geogebra.org/classic/fkp6w6mq>)



Lösungen zu den Aufgaben

- 1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = 2x^2 + 8x + 8$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2$$

$$y_s = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 8 = 0$$

$$\text{Wertemenge: } W = [0; \infty[$$

$$\text{Scheitelpunktform: } y = 2(x+2)^2 + 0 \Rightarrow y = 2(x+2)^2$$

$$\text{Symmetrieachse: } x = -2$$

- 2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = -x^2 - 4x - 5$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = -\frac{-4}{2 \cdot (-1)} = -2$$

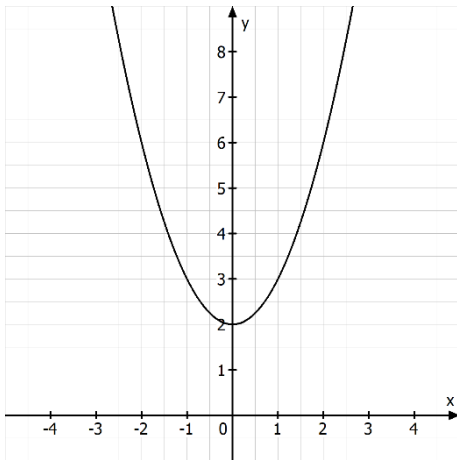
$$y_s = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 5 = -1$$

$$\text{Wertemenge: } W =]-\infty; -1]$$

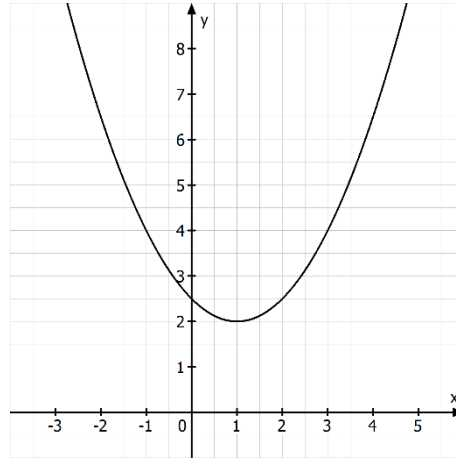
$$\text{Scheitelformelgleichung: } y = -(x+2)^2 - 1$$

$$\text{Symmetrieachse: } x = -2$$

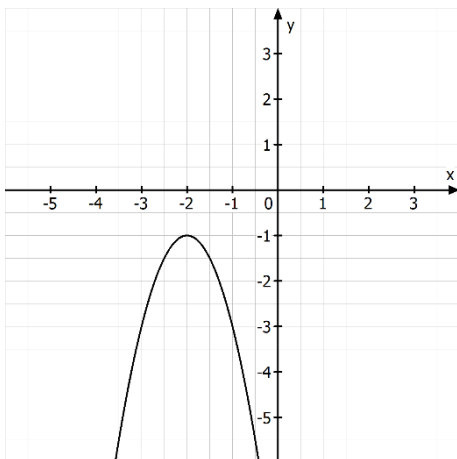
3 Geben Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen in der Scheitelpunktform an.



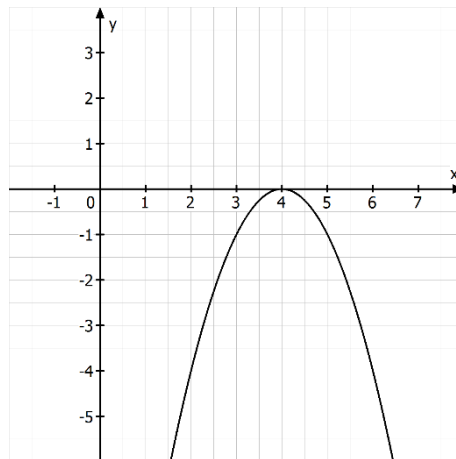
$$y = x^2 + 2$$



$$y = 0,5 \cdot (x - 1)^2 + 2$$



$$-2 \cdot (x + 2)^2 - 1$$



$$y = -(x - 4)^2$$

4.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt.

4.1 Wenn eine Parabel gestaucht ist, gilt $a \leq 1$.

Falsch, für $a = -2$ ist es eine gestreckte Parabel.

4.2 Wenn die Koordinaten des Scheitelpunkts gleich sind, ist die Parabel nach rechts verschoben.

Falsch, wenn $S(-1/-1)$ ist, dann ist die Parabel nach links verschoben.

4.3 Aus $c = 0$ folgt, dass die Parabel keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat.

Falsch, für $c = 0$ verlaufen die Parabeln durch den Ursprung.

4.4 Aus $a < -1$ folgt, dass die Parabel gestreckt ist.

Richtig.

4.5 Für $c > 0$ verläuft die Parabel nur im I. und II. Quadranten.

Falsch, Parabel mit $y = x^2 - 8x + 11$ verläuft auch unterhalb der x-Achse.

5.0 Von einer Parabel sind jeweils der Streckfaktor a und die Verschiebung parallel zu den Koordinatenachsen bekannt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform an.

5.1 $a = 1$; Verschiebung um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten;

$$y = (x - 4)^2 - 2$$

5.2 $a = -2$; Verschiebung um 4,5 Einheiten nach oben;

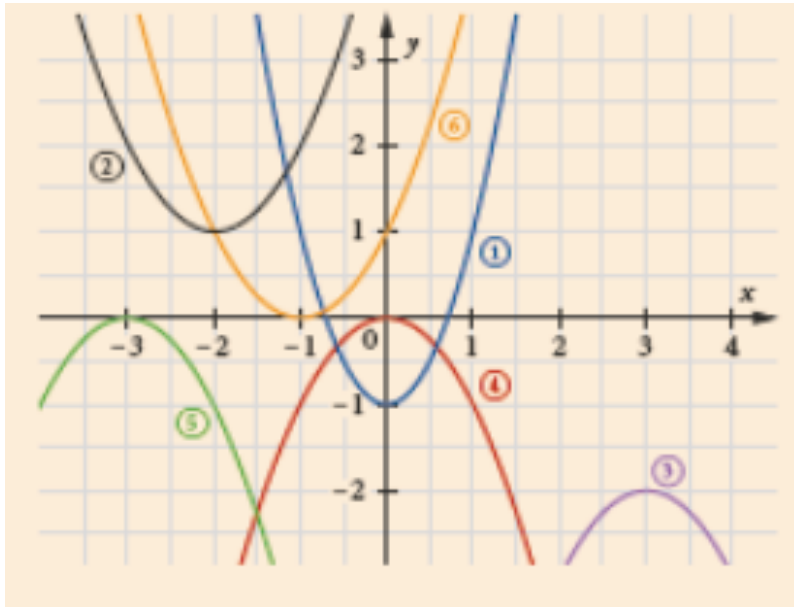
$$y = -2x^2 + 4,5$$

5.3 $a = -\frac{1}{6}$; Verschiebung um 3 Einheiten nach links;

$$y = -\frac{1}{6}(x + 3)^2$$

6 Ordnen Sie die Graphen und Gleichungen einander zu.

- a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = 2x^2 - 1$ c) $f(x) = -(x+3)^2$
 d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e) $f(x) = -(x-3)^2 - 2$ f) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



- 6a) 4 6b) 1 6c) 5 6d) 6 6e) 3 6f) 2

7 Lösen Sie mindestens fünf neue Aufgaben in der Geogebra Datei

„Übung zur allgemeinen quadratischen Funktion“.

(<https://www.geogebra.org/classic/fkp6w6mq>)

